Два доказательства инвариантности ротора относительно замены базиса: пример реализации взаимосвязи курсов физики и математики

Бортковская М.Р., Степанова Т.Р.

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Введение

- Для большинства студентов младших курсов и математическое понятие векторного произведения, и запись векторного произведения в координатах новы. Это вызывает трудности на занятиях по физике и математике. Поэтому в преподавании этих предметов возникает общая задача помочь студентам преодолеть эти трудности, одновременно появляется и конкретная возможность показать взаимосвязь физики и математики. Ниже приведены два доказательства инвариантности ротора относительно замены одного ортонормированного декартова базиса в пространстве на другой.

Инвариантность ротора относительно замены одного ортонормированного декартова базиса в пространстве на другой.

Утверждение. Ротор непрерывно дифференцируемого векторного поля в произвольной точке пространства E^3 инвариантен относительно замены одного ортонормированного базиса на другой (то есть координаты ротора в данной точке преобразуются при ортогональном преобразовании координат в пространстве так же, как координаты любого вектора).

Доказательство 1

Q– матрица перехода от ортонормированного базиса $\left\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}$ к ортонормированному базису $\left\{\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}'\right\}$, $Q^{-1}=Q^{T}$

$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}=a_{x'}\vec{i}'+a_{y'}\vec{j}'+a_{z'}\vec{k}'$ – векторное поле;

$a_x=a_x(x,y,z)$ – первая координата поля в «нештрихованном» базисе, $a_{x'}=a_{x'}(x',y',z')$ – первая координата поля в «штрихованном» базисе и т.д.

Доказательство 1 (продолжение)

Используем факты:

- $\left(\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot Q$ – из дифференциального исчисления функций нескольких переменных,
- формулу преобразования координат при замене базиса,
- $|Q| = 1$,
- определитель произведения матриц есть произведение их определителей.

Отсюда

$$(\vec{\nabla} \times \vec{a})' = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ \frac{\partial}{\partial x'} & \frac{\partial}{\partial y'} & \frac{\partial}{\partial z'} \\ a_{x'} & a_{y'} & a_{z'} \end{vmatrix} = \left| \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{pmatrix} \cdot Q \right| = \left(\vec{\nabla} \times \vec{a}\right)$$

Доказательство 2

$\mathrm{rot}\,\vec{a} = \vec{\nabla} \times \vec{a}$ – используем как *определение* ротора

Пусть $\vec{a}, \vec{b}$ – два произвольных вектора в пространстве E^3. $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ – какой-либо ортонормированный базис E^3, $\{x_a, y_a, z_a\}, \{x_b, y_b, z_b\}$ – координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в данном базисе; $\{x'_a, y'_a, z'_a\}, \{x'_b, y'_b, z'_b\}$ – координаты этих векторов в ортонормированном базисе $\{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$; ортогональная матрица Q – матрица перехода от базиса $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ к базису $\{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$.

Определим векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$ как вектор

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}.$$

Доказательство 2 (продолжение)

Покажем, что координаты вектора $\vec{c}\,' = \begin{vmatrix} \vec{i}\,' & \vec{j}\,' & \vec{k}\,' \\ x_a' & y_a' & z_a' \\ x_b' & y_b' & z_b' \end{vmatrix}$ в базисе $\left\{\vec{i}\,', \vec{j}\,', \vec{k}\,'\right\}$ связаны с координатами вектора $\vec{c}$ в базисе $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$ равенством $C = Q \cdot C'$, где C, C' – столбцы координат векторов $\vec{c}$ и $\vec{c}\,'$ в «нештрихованном» и «штрихованном» базисах. (Что и означает, что это один и тот же вектор!)

Воспользуемся матрицей перехода

Для произвольных ненулевых и неколлинеарных векторов $\vec{a}, \vec{b}$ *выберем ортонормированный* базис $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ следующим образом: вектор $\vec{i}$ сонаправлен вектору $\vec{a}$, вектор $\vec{j}$ компланарен векторам $\vec{a}, \vec{b}$, тогда вектор $\vec{k}$ полностью определен выбором векторов $\vec{i}, \vec{j}$ при условии, что тройка $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ правая. Равенство $Q^T C = C'$ проверяется покоординатно для *выбранного* базиса $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ и произвольного $\{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$. Тогда для двух произвольных ОТН базисов оно доказывается переходом от первого из них к выбранному выше, а от него ко второму.

Методические выводы

Обсуждение в курсе математики приведенных доказательств инвариантности ротора относительно замены базиса поможет студентам :

- закрепить математические понятия и навыки, необходимые для решения физических задач с векторными величинами;
- глубже осознать универсальное значение для физики и математики таких математических приемов и умений, как выбор удобной системы координат, векторные вычисления в координатах, применение свойств определителей, дифференцирование сложной функции нескольких переменных.

Рассмотренные доказательства могут быть изложены на лекциях либо изучены на практических занятиях, в том числе, как задачи на доказательство (для сильных студентов).