Инвариантность дифференциальных операторов относительно систем координат: методическое значение разных способов ее обоснования

Бортковская М.Р., Степанова Т.Р.

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Дифференциальные операторы

- градиент связывает силу и энергию потенциального поля;
- с помощью дивергенции описываются фундаментальные взаимодействия – гравитационное (сила взаимодействия масс) и взаимодействие зарядов (сила Кулона);
- ротор потенциального (консервативного) силового поля равен нулю, а ротор вихревого магнитного поля направлен вдоль движения заряда (тока).

Пространственно – временные свойства и инвариантность операторов

- Инвариантность линейных дифференциальных операторов связывает Законы механики с законами сохранения (энергии, импульса, момента импульса).
- В логике математического изложения требуется обоснование независимости линейных дифференциальных операторов от системы координат.
- Для развития инженерного мышления методически правильным будет показать логическое совпадение первых двух пунктов

Классификация методических подходов к изучаемой теме в курсах математики

1) определения теории поля и ее теоремы даются без привязки к системе координат, с применением максимально обобщенного математического аппарата; далее выводится координатная запись формул вычисления дифференциальных операторов;

2)определения дифференциальных операторов даются в координатной форме; после доказательства теорем Гаусса-Остроградского и Стокса даются определения дифференциальных операторов, не зависящие от системы координат; с помощью доказанных теорем обосновывается ранее введенная координатная форма записи операторов

3) определения дифференциальных операторов даются в координатной форме и сразу, с применением линейной алгебры и дифференциального исчисления функций нескольких переменных, показывается независимость введенных операторов от системы координат. После доказательства теорем теории поля даются «бескоординатные» («геометрические») определения дифференциальных операторов, как при втором подходе, и так же показывается, что они эквивалентны определениям, введенным ранее.

Координатные определения операторов

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$, тогда для скалярного поля $u = u(x, y, z)$

определяют $\operatorname{grad} u = \vec{\nabla} u$, (1)

для векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z)$, соответственно,

$$\operatorname{div} \vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a} \qquad (2)$$

и $\operatorname{rot} \vec{a} = \vec{\nabla} \times \vec{a}$. (3)

Потом (или ранее, без использования в их формулировках понятий дивергенции и ротора) доказывают теоремы теории поля (Гаусса – Остроградского и Стокса) в координатной записи, отсюда (а для градиента прямо из определения производной по направлению) получают следующие выражения дифференциальных операторов:

Геометрические определения

$(\mathrm{grad}\, u)\cdot\vec{n}_0 = \dfrac{\partial u}{\partial\vec{n}_0}$ (здесь $\vec{n}_0$ - произвольный единичный вектор, в правой части равенства производная скалярного поля u по направлению этого вектора; отсюда: градиент (в точке) это вектор, направленный в направлении наибольшего роста u, а его модуль равен этой скорости);

$\mathrm{div}\,\vec{a} = \lim\limits_{d(G)\to 0}\dfrac{\iint\limits_{(\partial G)^+}\vec{a}d\vec{S}}{\mu G}$ (объемная плотность потока векторного поля $\vec{a}$ в точке);

$(\mathrm{rot}\,\vec{a})\cdot\vec{n}_0 = \lim\limits_{d(G)\to 0}\dfrac{\int\limits_{(\partial G)^+}\vec{a}d\vec{r}}{\mu G}$ (в правой части равенства плоскостная плотность циркуляции векторного поля $\vec{a}$ в точке, найденная для плоскости с единичной нормалью $\vec{n}_0$; отсюда: ротор (в точке) это вектор, сонаправленный нормали к той плоскости, для которой плоскостная плотность циркуляции имеет наибольшее значение, а модуль этого вектора равен этому наибольшему значению).

Заключение

- можно сразу при появлении «координатных» определений (1), (2) и (3) убедиться в их независимости от системы координат;
- легко доказать средствами линейной алгебры и дифференциального исчисления функций многих переменных инвариантность градиента, дивергенции и ротора при замене одной прямоугольной декартовой системы на другую (той же ориентации), иными словами при замене одного ортонормированного базиса в пространстве на другой.
- При этом после доказательства теорем Гаусса-Остроградского и Стокса можно связать геометрические (по сути, физические) определения с координатными,
- такое двоякое обоснование инвариантности операторов в одном курсе может быть оправдано, во-первых, тем, что помогает студентам взглянуть на проблему с разных сторон и лучше понять практическую суть (как вычислять значения дифференциальных операторов в разных системах координат), что очень полезно для решения физических задач; во-вторых, тем, что дает возможность в связи с доказательством инвариантности активизировать знания и умения, полученные при изучении линейной алгебры и дифференциального исчисления функций нескольких переменных.