

# Альтернативный способ расчета характеристик поля и заряженности тел в электростатике

Новоселов Виктор Иванович

Тобольский индустриальный институт (филиал) «Тюменский индустриальный университет»

актуальность

Расчет характеристик электростатического поля и распределения зарядов на поверхности проводников, при условии, что заданы потенциалы проводников, их форма и относительное расположение, осуществляется путем решения дифференциальных уравнений Пуассона или Лапласа при заданных граничных условиях. Однако, нахождение явного вида, например, функции  $\varphi(\vec{r})$ , процедура достаточно сложная и трудоемкая.

**Цель:** рассмотреть альтернативный способ решения некоторых задач в электростатике, в которых не требуется решение дифференциальных уравнений.

$$\nabla^2 \varphi = -\rho / \epsilon_0$$

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

методика

Достаточно продуктивным при изучении электростатики является метод электрических изображений. Для определения характеристик поля конструируется другая задача, в которой поле, созданное зарядами, индуцированными на поверхности проводника, заменяется полем фиктивных зарядов. Далее подбирается некоторая конфигурация фиктивных зарядов  $q_i^*$ , чтобы в интересующей нас части пространства результирующее поле, созданное совокупностью фиктивных и реальных зарядов, было в точности таким же. Затем по известной конфигурации фиктивных зарядов и реальных зарядов заряженных тел выполняется расчет неизвестных характеристик.

**Методика построения электрических изображений зарядов:**

– анализируется форма проводящей поверхности, на которой возникают индуцированные заряды, и расположение заряженных тел в пространстве (например, точечных зарядов). Далее рассматривается возможная конфигурация фиктивных зарядов, которая бы обеспечивала совместно с реальными зарядами соответствующий потенциал на проводящей поверхности;

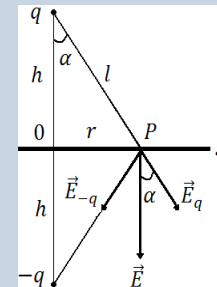
– если проводник безграничная проводящая плоскость, то электрическое изображение точечного заряда получается путем зеркального отражения в этой плоскости, соответственно,  $q^* = -q$ ,  $h^* = h$ . Здесь  $h^*$  и  $h$  – расстояния от основания перпендикуляра, опущенного из точки, где находится заряд  $q$ , на проводящую поверхность, до фиктивного и реального точечных зарядов;

– если проводник проводящая сфера, то изображение точечного заряда  $q^*$  лежит внутри сферы на линии соединяющей ее центр с зарядом  $q$ , на расстоянии  $h^*$  от центра сферы, которое равно  $h^* = R^2/h$ , а величина фиктивного заряда определяется по формуле  $q^* = -qR/h$ . Здесь  $R$  – радиус сферы,  $h$  – расстояние от центра сферы до заряда  $q$ .

## Результаты

**Задача 1.** Точечный заряд  $q$  находится на расстоянии  $h$  от безграничной проводящей плоскости  $S$ . Определить напряженность электростатического поля  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  вблизи поверхности проводника как функцию расстояния  $r$  от основания перпендикуляра, опущенного из заряда  $q$  на плоскость

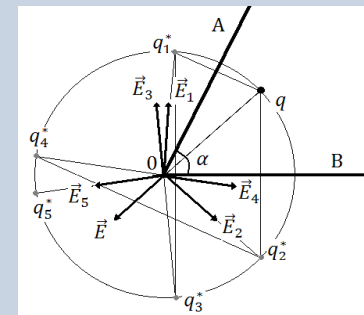
**Решение.** Электростатическое поле вблизи поверхности проводника создается зарядом  $q$  и индуцированными зарядами  $q_{\text{инд}}$ , распределение которых по поверхности проводника неизвестно. Применяя метод электрических изображений, сформулируем другую задачу, в которой поле создаваемое зарядом  $q$  и фиктивными зарядами  $q_i^*$  имеет такую же конфигурацию, что и в основной задаче. Такой системой является совокупность двух точечных зарядов, равных по величине и противоположных по знаку ( $q^* = -q$ ). Проводящая плоскость  $S$ , как эквипотенциальная поверхность, имеет  $\varphi = 0$ . Поле, созданное фиктивным зарядом, в верхнем полупространстве будет в точности таким же, как и поле зарядов индуцированных на этой поверхности. Напряженность результирующего поля в верхней части полупространства будет равна  $\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_{-q}$  или  $E = 2E_q \cos \alpha$ . После преобразований имеем:



$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qh}{(h^2 + r^2)^{3/2}}$$

**Задача 2.** Точечный заряд  $q > 0$  находится между двумя проводящими полуплоскостями, образующими между собой угол  $\alpha = 60^\circ$ . Найти напряженность электростатического поля  $\mathbf{E}_p$  вблизи ребра  $O$ .

**Решение.** Проводящие полуплоскости, образующие угол  $AOB$ , уходят в бесконечность, то потенциал  $\varphi = 0$ . Фиктивным зарядом для заряда  $q$  в полуплоскости  $OA$  является заряд  $q_1^* = -q$ , а в полуплоскости  $OB$   $q_2^* = -q$ . Однако, конфигурация из точечных зарядов  $q, q_1^*, q_2^*$  не обеспечивает выполнение условия  $\varphi = 0$  на проводящих полуплоскостях. Из рисунка видно, что точечные заряды располагаются на окружности, радиус которой равен расстоянию от точки  $O$  до заряда  $q$ . Введем еще три фиктивных заряда  $q_3^* = q, q_4^* = q, q_5^* = -q$  и расположим их на окружности как показано на рисунке. Комбинация из шести точечных зарядов обеспечивает условие  $\varphi = 0$  на проводящих полуплоскостях. Напряженность результирующего поля в любой точке полупространства ограниченного проводящими полуплоскостями равна  $\vec{E}_p = \vec{E} + \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 + \vec{E}_5$ . Вблизи ребра  $O$   $|\vec{E}| = |\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = |\vec{E}_3| = |\vec{E}_4| = |\vec{E}_5|$ . В результате имеем:



$$\vec{E}_p = 0.$$

**Задача 3.** На бесконечной плоской поверхности проводника  $AD$  имеется сферический бугор  $BMC$ , центр  $O$  которого лежит в этой же плоскости. На перпендикуляре  $OM$  вне проводника расположен точечный заряд  $q$ . Найти напряженность электростатического поля  $E_p$  в пространстве.

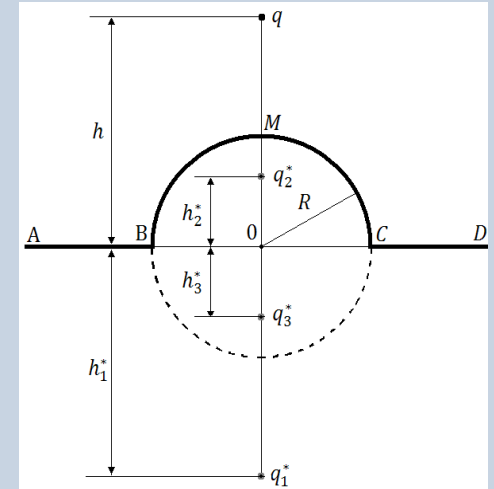
**Решение.** Электростатическое поле в пространстве выше проводящей поверхности  $ABMCD$  создается точечным зарядом  $q$  и индуцированными зарядами  $q_{\text{инд}}$  на плоскости, имеющей сложный рельеф. Так как проводящая плоскость  $AD$  уходит в бесконечность, то потенциал проводящей поверхности везде  $\varphi = 0$ . Электрическим изображением в плоскости точечного заряда является его зеркальное отражение в этой плоскости. Фиктивный заряд  $q_1^* = -q$  расположен на перпендикуляре к плоскости  $AD$  и отстоит на расстоянии  $h_1^* = h$  от точки  $O$ . Однако, одного фиктивного точечного заряда  $q_1^*$  недостаточно, чтобы обеспечить выполнение граничных условий для потенциала на выпуклой части поверхности. Чтобы потенциал на поверхности сферического бугра  $BMC$  был равен нулю, расположим на перпендикуляре  $OM$  фиктивный заряд  $q_2^*$ . Для сферической поверхности его величина равна  $q_2^* = -(R/h)q$ , а расстояние от центра  $O$  составляет  $h_2^* = R^2/h$ . Из рисунка видно, что в этом случае на сферической поверхности  $BMC$  будет отличным от нуля потенциал поля, создаваемого фиктивным зарядом  $q_1^*$ , кроме этого останется не скомпенсированным, потенциал поля, создаваемого фиктивным  $q_2^*$  на плоскости  $AD$ . Для выполнения условия  $\varphi = 0$  на всей проводящей поверхности необходимо добавить еще фиктивные заряды. Из геометрии рисунка следует, что если еще один фиктивный заряд  $q_3^*$  величиной

$$q_3^* = -\frac{R}{h_1^*} q_1^* = \frac{R}{h} q,$$

расположить на перпендикуляре  $OM$  и на расстоянии от центра  $O$  равном

$$h_3^* = \frac{R^2}{h_1^*} = \frac{R^2}{h},$$

то потенциал результирующего поля, созданного всеми зарядами, на проводящей поверхности везде будет равен нулю. Можно констатировать, что конфигурация зарядов  $q, q_1^*, q_2^*, q_3^*$  полностью описывает электростатическое поле, созданное точечным зарядом  $q$  и индуцированными зарядами  $q_{\text{инд}}$ . Напряженность и потенциал этого поля в любой точке пространства можно найти, используя соотношения:



$$\vec{E}_p = \vec{E} + \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3,$$

$$\varphi_p = \varphi + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3.$$

## заклучение

Метод электрических изображений зарядов позволяет достаточно просто проводить расчеты характеристик электростатического поля и определять распределение индуцированных зарядов на проводящих поверхностях при условии, если удастся найти простую конфигурацию фиктивных зарядов, полностью моделирующее реальное поле. Особенно данный метод продуктивен, если заряженные тела обладают геометрической симметрией.