

Альтернативный способ расчета характеристик поля и заряженности тел в электростатике

Новоселов Виктор Иванович

Тобольский индустриальный институт (филиал)
ФГБОУ ВО «Тюменский индустриальный университет»,
vivnovoselov@yandex.ru

Введение

Рассматриваются методические аспекты изложения темы «Электростатика» при изучении дисциплины «Физика» в техническом вузе, а именно, особенности решения задач, связанные с расчетом характеристик электростатического поля и распределением зарядов на поверхности проводников. Такие задачи решаются на основе дифференциальных уравнений Пуассона $\nabla^2\varphi = -\rho/\varepsilon_0$ или Лапласа $\nabla^2\varphi = 0$ при заданных граничных условиях. Однако, нахождение явного вида, например, функции $\varphi(\vec{r})$, процедура достаточно сложная и трудоемкая. Кроме этого объем часов, отводимый на изучение дисциплины «Физика», в частности раздела «Электromагнетизм», ограничен.

Цель

Предложить альтернативные способы решения некоторых задач в «Электростатике», в которых не требуется решение дифференциальных уравнений. В соответствии, с теоремой единственности, если решение задачи удовлетворяет уравнению Лапласа (Пуассона) и граничным условиям, то оно является единственным и неважно каким образом оно получено (возможно – угадано).

Методология, методы и методики

В учебной литературе альтернативные способы расчета характеристик электрического поля в той или иной мере представлены, например, у Д. В. Сивухина («Общий курс физики», т 3, «Электричество»), И.Е Иродова («Основные законы электромагнетизма») и др. Мы полагаем, что достаточно продуктивным при изучении электростатики является метод электрических изображений. Данный метод, когда его можно применить, позволяет относительно просто рассчитать характеристики поля $\vec{E}(\vec{r})$, $\varphi(\vec{r})$ и распределение зарядов по поверхностям проводников.

В методе электрических изображений для определения характеристик поля конструируется другая задача, в которой поле, созданное зарядами, индуцированными на поверхности проводников, заменяется другим полем. Поскольку проводящая поверхность имеет фиксированный потенциал и чаще всего она заземлена, то ее потенциал равен нулю ($\varphi = 0$). Далее подбирается некоторая конфигурация фиктивных зарядов q_i^* , чтобы в интересующей нас части пространства результирующее поле, созданное совокупностью фиктивных и реальных зарядов, было в точности таким же. Затем по известной конфигурации фиктивных зарядов и реальных зарядов заряженных тел выполняется расчет неизвестных характеристик.

Методика построения электрических изображений зарядов:

- анализируется форма проводящей поверхности, на которой возникают индуцированные заряды, и расположение заряженных тел в пространстве (например, точечных зарядов). Далее рассматривается возможная конфигурация фиктивных зарядов, которая бы обеспечивала совместно с реальными зарядами соответствующий потенциал на проводящей поверхности;
- если проводник безграничная проводящая плоскость, то электрическое изображение точечного заряда получается путем зеркального отражения в этой плоскости, соответственно, $q^* = -q$, $h^* = h$. Здесь h^* и h – расстояния от основания перпендикуляра, опущенного из точки, где находится заряд q , на проводящую поверхность, до фиктивного и реального точечных зарядов;
- если проводник проводящая сфера, то изображение точечного заряда лежит внутри сферы на линии соединяющей ее центр с зарядом q , на расстоянии h^* от центра сферы, которое равно $h^* = R^2/h$, а

величина фиктивного заряда определяется по формуле $q^* = -qR/h$. Здесь R – радиус сферы, h – расстояние от центра сферы до заряда q .

Рассмотрим применение метода электрических изображений на конкретных примерах.

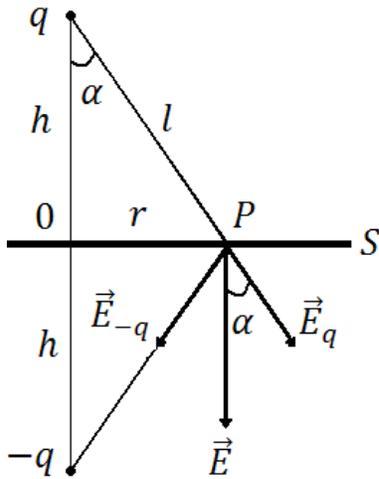


Рис.1. Конфигурация зарядов для плоскости

Задача 1. Точечный заряд q находится на расстоянии h от безграничной проводящей плоскости S . Определить напряженность электростатического поля $E(r)$ вблизи поверхности проводника как функцию расстояния r от основания перпендикуляра, опущенного из заряда q на плоскость (рис. 1).

Решение. Электростатическое поле вблизи поверхности проводника создается зарядом q и индуцированными зарядами $q_{\text{инд}}$, распределение которых по поверхности проводника неизвестно. Применяя метод электрических изображений, сформулируем другую задачу, в которой поле создаваемое зарядом q и фиктивными зарядами q_i^* имеет такую же конфигурацию, что и в основной задаче. Здесь такой системой является совокупность двух точечных зарядов, равных по величине и противоположных по знаку ($q^* = -q$). Проводящая плоскость S , как эквипотенциальная поверхность, имеет $\varphi = 0$. Поле, созданное фиктивным зарядом, в верхнем полупространстве будет в точности таким же, как и поле зарядов индуцированных на этой поверхности. Напряженность

резльтирующего поля в верхней части полупространства будет равна

$$\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_{-q}.$$

Из рис. 1 видно, что

$$E = 2E_q \cos \alpha,$$

где

$$E_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{l^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(h^2 + r^2)}.$$

После преобразований получим искомое соотношение

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qh}{(h^2 + r^2)^{3/2}},$$

которое описывает электростатическое поле вблизи проводящей плоскости.

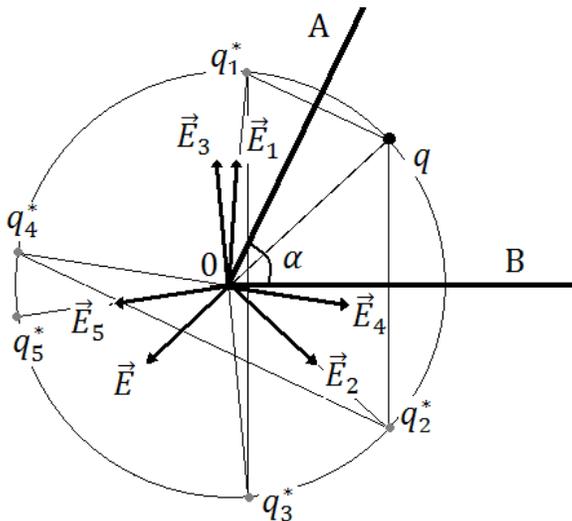


Рис.2. Конфигурация зарядов для проводящих полуплоскостей.

Задача 2. Точечный заряд $q > 0$ находится между двумя проводящими полуплоскостями, образующими между собой угол $\alpha = 60^\circ$. Найти напряженность электростатического поля E_p вблизи ребра O .

Решение. Электростатическое поле в полупространстве, ограниченное двумя проводящими полуплоскостями (ОА и ОВ), где находится заряд q , создается самим этим зарядом и индуцированными зарядами $q_{\text{инд}}$ на полуплоскостях (рис. 2). Для нахождения напряженности поля E_p воспользуемся методом электрических изображений. Так как проводящие полуплоскости, образующие угол АОВ, уходят в бесконечность, то потенциал $\varphi = 0$. Необходимо подобрать такую конфигурацию фиктивных

зарядов, чтобы совместно с зарядом q обеспечить равенство нулю потенциала на проводящих полуплоскостях. Если заряд точечный, а проводящая плоскость уходит в бесконечность, то электрическим изображением такого заряда (фиктивным зарядом) всегда является зеркальное отражение этого заряда в поверхности этой плоскости. В нашем случае, ситуация намного сложнее. Фиктивным зарядом для заряда q в полуплоскости OA является заряд $q_1^* = -q$, а в полуплоскости OB $q_2^* = -q$. Однако, конфигурация из точечных зарядов q, q_1^*, q_2^* не обеспечивает выполнение условия $\varphi = 0$ на проводящих полуплоскостях. Из рисунка видно, что точечные заряды располагаются на окружности, радиус которой равен расстоянию от точки O до заряда q . Введем еще три фиктивных заряда $q_3^* = q, q_4^* = q, q_5^* = -q$ и расположим их на окружности как показано на рис. 3. Комбинация из шести точечных зарядов обеспечивает условие $\varphi = 0$ на проводящих полуплоскостях. Напряженность результирующего поля в любой точке полупространства ограниченного проводящими полуплоскостями равна

$$\vec{E}_p = \vec{E} + \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 + \vec{E}_5.$$

Вблизи ребра O

$$|\vec{E}| = |\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = |\vec{E}_3| = |\vec{E}_4| = |\vec{E}_5|,$$

а направление векторов такое, что

$$\vec{E}_p = 0.$$

Задача 3. На бесконечной плоской поверхности проводника AD имеется сферический бугор BMC , центр O которого лежит в этой же плоскости. На перпендикуляре OM вне проводника расположен точечный заряд q . Найти напряженность электростатического поля E_p в пространстве (рис. 3).

Решение. Электростатическое поле в пространстве выше проводящей поверхности $ABMCD$ создается точечным зарядом q и индуцированными зарядами $q_{\text{инд}}$ на плоскости, имеющей сложный

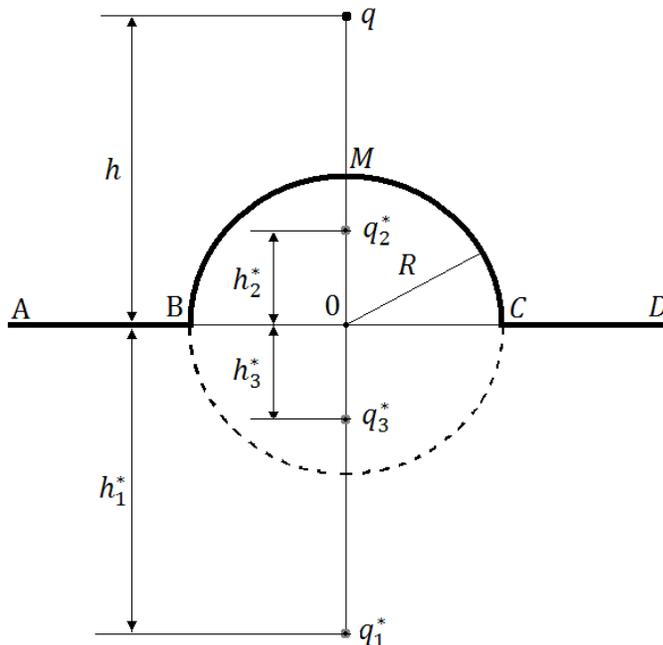


Рис. 3. Конфигурация зарядов для плоскости, содержащей полусферу.

рельеф. Для нахождения напряженности поля E_p воспользуемся методом электрических изображений. Так как проводящая плоскость AD уходит в бесконечность, то потенциал проводящей поверхности везде $\varphi = 0$. Необходимо подобрать такую конфигурацию фиктивных зарядов, чтобы потенциал результирующего поля удовлетворял граничным условиям на этой поверхности. Электрическим изображением в плоскости точечного заряда (фиктивным зарядом) является его зеркальное отражение в этой плоскости. В нашем случае это заряд $q_1^* = -q$, расположенный на перпендикуляре к плоскости AD и отстоящий на расстоянии $h_1^* = h$ от точки O . Однако, одного фиктивного точечного заряда q_1^* недостаточно, чтобы обеспечить выполнение граничных условий для потенциала на выпуклой части поверхности. Чтобы потенциал на поверхности сферического бугра BMC был равен нулю, расположим на перпендикуляре OM фиктивный заряд q_2^* . В

соответствии, с построением электрических изображений точечных зарядов в сферической поверхности его величина равна

$$q_2^* = -\frac{R}{h}q,$$

а расстояние от центра O составляет

$$h_2^* = \frac{R^2}{h}.$$

Из рис. 3 видно, что в этом случае на сферической поверхности BC будет отличным от нуля потенциал поля, создаваемого фиктивным зарядом q_1^* , кроме этого останется не скомпенсированным, потенциал поля, создаваемого фиктивным q_2^* на плоскости AD . Для выполнения условия $\varphi = 0$ на всей проводящей поверхности необходимо добавить еще фиктивные заряды. Из геометрии рисунка следует, что если еще один фиктивный заряд q_3^* величиной

$$q_3^* = -\frac{R}{h_1^*}q_1^* = \frac{R}{h}q,$$

расположить на перпендикуляре OM и на расстоянии от центра O равном

$$h_3^* = \frac{R^2}{h_1^*} = \frac{R^2}{h},$$

то потенциал результирующего поля, созданного всеми зарядами, на проводящей поверхности везде будет равен нулю. Можно констатировать, что конфигурация зарядов q, q_1^*, q_2^*, q_3^* полностью описывает электростатическое поле, созданное точечным зарядом q и индуцированными зарядами $q_{\text{инд}}$. Напряженность и потенциал этого поля в любой точке пространства можно найти, используя следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\vec{E}_p &= \vec{E} + \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3, \\ \varphi_p &= \varphi + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3.\end{aligned}$$

Напряженности $(\vec{E}, \vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$ и потенциалы $(\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ электростатических полей, создаваемых точечными зарядами, рассчитываются по стандартным формулам.

Результаты

Опросные методы, а также результаты сессий, показывают, что освоение студентами раздела «Электростатика» обеспечивает необходимое качество освоения материала. С другой стороны применение разных по степени трудоемкости и общности методов, развивает у обучающихся интуицию, формирует процессы, отвечающие за установление обобщенных логических связей между функционально связанными между собой физическими величинами.

Заключение

Мы считаем, что метод электрических изображений зарядов, как альтернативный способ, позволяет относительно просто рассчитать характеристики поля $\vec{E}(\vec{r}), \varphi(\vec{r})$, поверхностную плотность индуцированных зарядов $\sigma_{\text{инд}}$, если удастся найти простую конфигурацию фиктивных зарядов, полностью моделирующее реальное поле. Особенно данный метод продуктивен, если заряженные тела обладают геометрической симметрией.